

Control de posición y fuerza de robots con retroalimentación visual

Alejandro Gutiérrez-Giles, Marco A. Arteaga y Hebertt J. Sira-Ramírez
Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería, UNAM
Ciudad Universitaria, Coyoacan DF 04510, México
alejandrogilesg@yahoo.com.mx

Resumen—En este documento se propone resolver el problema simultáneo de control servovisual y de fuerza para robots manipuladores en contacto con un entorno no estructurado. La solución propuesta se basa en la aplicación de observadores GPI como esquema principal de control-observador. Este método presenta ciertas ventajas respecto a otros enfoques utilizados para el mismo problema, tales como: facilidad de sintonización, estimación de variables útiles dentro del mismo algoritmo, robustez ante incertidumbres paramétricas y ante perturbaciones no modeladas, etc. Así mismo, se hace uso del principio de ortogonalización visual para atacar los problemas de control de fuerza y control visual por separado. En este artículo se utiliza control servovisual basado en imagen para hacer el algoritmo robusto ante incertidumbres en la cinemática de la cámara y del robot mismo. Resultados de simulación son utilizados para validar la efectividad del método propuesto.

Palabras clave: Robotic manipulators, robot vision, force control, observers.

I. INTRODUCCIÓN

Cuando se requiere que un robot manipulador interactúe con su entorno a menudo se necesita controlar no sólo el movimiento, sino la fuerza que éste ejerce sobre dicho entorno. Este problema ha sido un tema constante de investigación durante las últimas décadas y aún está vigente debido a la complejidad del mismo. En particular, cuando se tiene un entorno rígido, se han propuesto soluciones efectivas como el control híbrido (Arimoto *et al.*, 1993) que, sin embargo, dependen en buena medida de la calibración de la superficie sobre la que ejerce fuerza el robot, lo que limita las posibles aplicaciones a ambientes totalmente controlados. Una forma de habilitar a los manipuladores para realizar trabajos que involucren control de fuerza en ambientes no estructurados (y hacerlos más versátiles) es mediante la retroalimentación visual, lo que permite obtener una gran cantidad de datos del entorno sin ser invasivo. Aunque el control de movimiento basado en retroalimentación visual es por sí mismo un campo de investigación complejo y extenso, se han reportado trabajos que exitosamente han logrado combinar el control servovisual y el control de fuerza (Lipiello *et al.*, 2007), (Dean-León *et al.*, 2006). No obstante, este problema aún presenta muchos retos y posibilidades de mejora, sobre todo conforme continúen mejorando los sensores de fuerza

(menor ruido, mayor precisión) y aumente la velocidad de adquisición y procesamiento de los datos captados por la cámara. En este documento se presenta un enfoque distinto al abordado en trabajos anteriores y está basado en gran medida en el método propuesto en (Sira-Ramírez *et al.*, 2010) sobre el control lineal de sistemas mecánicos no lineales.

II. MODELADO MATEMÁTICO

II-A. Modelo del robot

Considérese el problema de un robot manipulador rígido completamente actuado en contacto con una superficie rígida como se muestra en la Figura 1. La ecuación que describe esta dinámica está descrita por (Sciavicco y Siciliano, 1996)

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau - \tau_p + J_\varphi^T(q)\lambda, \quad (1)$$

donde $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva semidefinida que contiene los coeficientes de fricción viscosa en las articulaciones del robot, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de torques de entrada en las articulaciones, $\tau_p \in \mathbb{R}^n$ representa las fuerzas (no modeladas) que perturban al sistema, mismas que se asumen acotadas y suaves y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange, cuyo significado físico es el de la fuerza aplicada a la superficie en el punto de contacto. Al encontrarse el robot en contacto con la superficie, se define una restricción del tipo

$$\varphi(q) = 0, \quad (2)$$

de donde puede obtenerse el gradiente, $J_\varphi(q) \triangleq \nabla \varphi(q) = \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que es un vector unitario sobre la normal al plano tangente a la superficie en el punto de contacto. Se asume que $J_\varphi(q)$ es de rango completo y que la restricción $\varphi(q) = 0$ se define de tal manera que $J_\varphi(q)$ tiene norma unitaria.

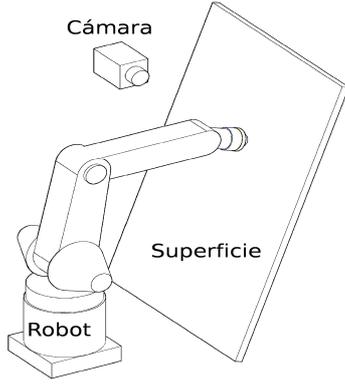


Figura 1. Robot en contacto con una superficie y cámara.

II-B. Modelo de la cámara

Cuando el movimiento del robot sobre la superficie se limita a un plano, la posición del efector final del robot puede conocerse utilizando sólo una cámara colocada de tal forma que el plano de imagen sea paralelo al plano de movimiento del robot. En este caso, la relación entre la posición en coordenadas cartesianas del efector final y la posición en coordenadas de imagen del mismo puede modelarse cinemáticamente por la Proyección de Perspectiva dada por (Kelly *et al.*, 2004)

$$\mathbf{y} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi \left(\mathbf{x} - \begin{bmatrix} {}^cO_{R1} \\ {}^cO_{R2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ es el vector de coordenadas de imagen, $\alpha_\lambda \triangleq (\alpha_c \lambda_v) / ({}^cO_{R3} - \lambda_v)$, α_c es el número de píxeles por unidad de distancia en el plano de imagen, ${}^cO_{R3}$ el desplazamiento del origen del sistema coordenado asignado a la cámara con respecto a la base del robot, sobre el eje z , $\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi_c) & \sin(\phi_c) \\ \sin(\phi_c) & -\cos(\phi_c) \end{bmatrix}$ es la matriz de rotación del sistema coordenado de la cámara con respecto a la base, ϕ_c es el ángulo de rotación sobre un eje perpendicular a los planos (paralelos) de la cámara y del plano de movimiento del robot, ${}^cO_{R1}$ y ${}^cO_{R2}$ son los desplazamientos del origen del sistema coordenado asignado a la cámara con respecto a la base, sobre los ejes x e y , respectivamente y u_0 , v_0 son los desplazamientos del pixel coincidente con el eje principal de la cámara y el origen del sistema coordenado asociado al plano de imagen.

III. CONTROL SIMULTÁNEO DE POSICIÓN Y FUERZA EN COORDENADAS VISUALES

III-A. Modelo en coordenadas de imagen

Debido a las ventajas que representa el control de posición del robot directamente en coordenadas de imagen, se procederá a obtener el modelo matemático del mismo en contacto con la superficie en términos de estas coordenadas. Asumiendo que la cámara puede identificar la superficie

sobre la que se mueve el robot, puede definirse la restricción $\varphi(\mathbf{q})$ en coordenadas de imagen como

$$\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Derivando dos veces esta ecuación con respecto al tiempo y utilizando (1) y (3) se obtiene

$$\frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \tau_p + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}, \quad (5)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es el Jacobiano analítico del manipulador, que se considera de rango completo mediante la siguiente suposición:

Suposición 1: El robot no pasa por ninguna singularidad. Si se definen

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{q}) \triangleq \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \quad (6)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{N} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \tau_p - \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (7)$$

se puede reescribir este modelo en términos de las coordenadas de imagen \mathbf{y} como

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{N} + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}. \quad (8)$$

III-B. Principio de Ortogonalización Visual

Dado que se quiere controlar tanto la posición como la fuerza que ejerce el robot sobre la superficie mediante una sola señal de control $\boldsymbol{\tau}$, es necesario dividirla en dos señales independientes, *i. e.*,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_u + \boldsymbol{\tau}_c, \quad (9)$$

lo que puede lograrse utilizando el Principio de Ortogonalización Visual (Dean-León *et al.*, 2006). Este principio es una adaptación al control servovisual del Principio de Ortogonalización descrito en (Arimoto *et al.*, 1993) el cual parte de la propiedad física que surge cuando un robot está en contacto con una superficie rígida y establece que en las direcciones en las que existe movimiento por parte del robot éste no ejerce fuerza sobre la superficie y recíprocamente, en las direcciones en las que el manipulador ejerce fuerza sobre la superficie, no hay movimiento. Para utilizar esta propiedad en coordenadas de imagen, se calculan las matrices de proyección

$$\mathbf{P}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{P}_y \triangleq \mathbf{J}_{\varphi y}^T \left(\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{J}_{\varphi y}^T \right)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi y} \quad (10)$$

y

$$\mathbf{Q}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{Q}_y \triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{P}_y). \quad (11)$$

Estas matrices son ortogonales, por lo que

$$\mathbf{Q}_y \mathbf{P}_y = \mathbf{0}, \quad (12)$$

además, cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_y \mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi y} \mathbf{P}_y = \mathbf{J}_{\varphi y}. \quad (15)$$

III-C. Control mediante observadores GPI

Para el movimiento no restringido, se define el error de seguimiento en coordenadas de imagen como

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{y} - \mathbf{y}_r, \quad (16)$$

donde \mathbf{y}_r es la señal de referencia a seguir. La dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado está dada por

$$\ddot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{z}_{u1}, \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{z}_{u1} \triangleq \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \left(\boldsymbol{\tau}_c + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N} \right) - \ddot{\mathbf{y}}_r \quad (18)$$

La matriz \mathbf{M}_v se supone conocida al menos aproximadamente. Por otra parte, uno de los objetivos del observador GPI es el de estimar en línea la señal de perturbación (desconocida) \mathbf{z}_{u1} , para la que se hacen las siguientes suposiciones:

Suposición 2: Los componentes de \mathbf{z}_{u1} y un número finito p de sus derivadas, están absoluta y uniformemente acotadas para toda trayectoria $\mathbf{y}(t)$ del sistema que converge a una vecindad de la señal de referencia $\mathbf{y}_r(t)$ mediante la acción de algún controlador retroalimentado suave. \triangle

Suposición 3: Cada uno de los componentes del término aditivo, \mathbf{z}_{u1} , pueden ser escritos como la suma de un elemento arbitrario de una familia de polinomios de Taylor de $(p-1)$ -ésimo grado y un vector de términos residuales de la siguiente forma:

$$\mathbf{z}_{u1} = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}_i t^i + \mathbf{r}(t), \quad (19)$$

donde cada \mathbf{a}_i es un vector de coeficientes constantes y $\mathbf{r}(t)$ es el vector de términos residuales. \triangle

Suposición 4: Dado que son señales dependientes del tiempo, cada una de las componentes de \mathbf{z}_{u1} , puede ser instantáneamente modelada por un elemento de una familia fija de polinomios de Taylor de grado fijo $(p-1)$. Este modelo de polinomio de grado fijo para las perturbaciones a la entrada, \mathbf{z}_{u1} , tiene la propiedad de ser invariante ante corrimientos en el tiempo y además cada una de estas entradas siempre satisface

$$\frac{d^p \mathbf{z}_{uj}}{dt^p} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (20)$$

\triangle

Tomando en cuenta estas suposiciones se presenta el resultado principal.

Teorema 1: Sea \mathbf{I} la matriz identidad de $k \times k$, $\boldsymbol{\zeta}$ y $\boldsymbol{\omega}_n$ matrices diagonales positivas definidas, constantes, tales que la matriz diagonal de elementos polinomiales, $\boldsymbol{\rho}_c(s)$, de variable compleja, s , definida por

$$\boldsymbol{\rho}_c(s) = s^2 \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_n^2, \quad (21)$$

tiene la propiedad de que todos sus elementos diagonales son polinomios Hurwitz de segundo orden. Entonces, el esquema de control retroalimentado con observador lineal

$$\boldsymbol{\tau}_u = \mathbf{M}_v(\mathbf{q}) \left[-2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega}_n \hat{\mathbf{e}}_2 - \boldsymbol{\omega}_n^2 \mathbf{e}_y - \hat{\mathbf{z}}_{u1} \right] \quad (22)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_{u(p+1)} \tilde{\mathbf{e}}_y \quad (23)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_2 = \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \hat{\mathbf{z}}_{u1} + \boldsymbol{\lambda}_{up} \tilde{\mathbf{e}}_y \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u1} = \hat{\mathbf{z}}_{u2} + \boldsymbol{\lambda}_{u(p-1)} \tilde{\mathbf{e}}_y \quad (25)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u2} = \hat{\mathbf{z}}_{u3} + \boldsymbol{\lambda}_{u(p-2)} \tilde{\mathbf{e}}_y \quad (26)$$

\vdots

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{u(p-1)} = \hat{\mathbf{z}}_{up} + \boldsymbol{\lambda}_{u1} \tilde{\mathbf{e}}_y \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{up} = \boldsymbol{\lambda}_{u0} \tilde{\mathbf{e}}_y, \quad (28)$$

con $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_y = \hat{\mathbf{e}}_2$, lleva global y asintóticamente al vector de errores $\tilde{\mathbf{e}}_y = \mathbf{e}_y - \hat{\mathbf{e}}_1$ y a su derivada temporal, $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y = \dot{\mathbf{e}}_y - \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2$, a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del error de estimación, $(\tilde{\mathbf{e}}_y, \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y)$, siempre que las matrices diagonales, constantes, $\{\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{p+1}\}$, sean escogidas de tal forma que todos los componentes no nulos de la matriz diagonal de variable compleja, $\boldsymbol{\rho}(s)$, definida como

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\rho}(s) = s^{p+2} \mathbf{I} + \boldsymbol{\lambda}_{p+1} s^{p+1} + \dots + \boldsymbol{\lambda}_1 s + \boldsymbol{\lambda}_0, \quad (29)$$

sean polinomios Hurwitz de grado $p+2$, con raíces suficientemente alejadas del eje imaginario a la izquierda en el plano complejo.

Demostración Sea el vector de error de seguimiento definido por $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_r$ y sea \mathbf{e}_2 el vector de error de seguimiento de velocidad dado por $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r$. La dinámica del error de seguimiento (17), descrita con el modelo de la perturbación mediante la señal $\mathbf{z}_{u1}(t)$, se puede escribir, de acuerdo con (19), como

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{z}_{u1}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{u1} = \mathbf{z}_{u2}$$

\vdots

$$\dot{\mathbf{z}}_{u(p-1)} = \mathbf{z}_{up}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{up} = \mathbf{r}^{(p)}(t).$$

Sean $\tilde{\mathbf{z}}_{uj} = \mathbf{z}_{uj} - \hat{\mathbf{z}}_{uj}$, $j = 1, 2, \dots, k$ los errores de estimación del estado de la perturbación. Los vectores de error de observación, $\tilde{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, 2$, que están asociados con el error de seguimiento de posición y velocidad, \mathbf{e}_y y

\dot{e}_y , satisfacen la dinámica perturbada, predominantemente lineal

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 - \lambda_{p+1}\tilde{e}_y \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{z}_{u1} - \lambda_p\tilde{e}_y \\ \dot{\hat{z}}_{u1} &= \hat{z}_{u2} - \lambda_{p-1}\tilde{e}_y \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{u(p-1)} &= \hat{z}_{up} - \lambda_1\tilde{e}_y \\ \dot{\hat{z}}_{up} &= \mathbf{r}^{(p)}(t) - \lambda_0\tilde{e}_y,\end{aligned}$$

donde $\tilde{e}_y = e_y - \hat{e}_1$. Este sistema de ecuaciones también puede representarse como

$$\tilde{e}_y^{(p+2)} + \lambda_{p+1}\tilde{e}_y^{(p+1)} + \dots + \lambda_0\tilde{e}_y = \frac{d^p}{dt^p}z_{u1}(t). \quad (30)$$

De la teoría de sistemas lineales, particularmente de la estabilidad entrada acotada-salida acotada (estabilidad BIBO), se tiene que el sistema descrito por (30) presenta una respuesta BIBO estable si se cumple que la entrada $\mathbf{r}^{(p)}(t)$ está acotada, así como sus derivadas temporales (lo cual es válido debido a las suposiciones realizadas anteriormente) y además si se cumple que los coeficientes matriciales, $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_0\}$, se escogen de tal manera que los polinomios de variable compleja s , en la diagonal de la matriz $\rho(s)$, dada por

$$\rho(s) = s^{p+2}\mathbf{I}_n + \lambda_{p+1}s^{p+1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0, \quad (31)$$

son Hurwitz, con raíces ubicadas lo suficientemente lejos a la izquierda en el plano complejo (Chen, 1999). Bajo estas condiciones, la respuesta en el tiempo de la dinámica (30), será exponencial, asintótica y uniformemente acotada por un disco arbitrariamente pequeño centrado en el origen del espacio de error de seguimiento de estimación, $\tilde{e}_y = \dot{\tilde{e}}_y = \ddot{\tilde{e}}_y = \dots = \tilde{e}_y^{(p+1)} = \mathbf{0}$. Aún más, el radio del disco que acota últimamente al error en el espacio de fase de \tilde{e}_y es proporcional al inverso del valor absoluto de la parte real más pequeña de las raíces de los polinomios característicos que se encuentran en la diagonal de (31). Por otra parte, como consecuencia de la convergencia a un disco arbitrariamente pequeño alrededor del origen del espacio de errores de estimación para el modelo de error del sistema perturbado, el estado del observador, \hat{z}_{u1} , se convierte en una estimación arbitrariamente cercana de la función de perturbación a la entrada, $z_{u1}(t)$. Además, también se aproximan las derivadas temporales de esta señal, es decir, $z_{u1}^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots$, por medio de las variables del observador correspondientes, $\hat{z}_{u(j+1)}$, $j = 1, 2, \dots$

La dinámica en lazo cerrado se obtiene substituyendo la ley de control (22) en la dinámica del error (17), obteniendo

$$\ddot{e}_y + 2\zeta\omega_n\dot{e}_2 + \omega_n^2e_y = z_{u1}(t) - \hat{z}_{u1}(t). \quad (32)$$

Cuando $\hat{e}_1 \rightarrow \dot{e}_y$ y $\hat{z}_{u1}(t) \rightarrow z_{u1}(t)$, esta dinámica se comporta como un sistema lineal invariante en el tiempo

de segundo orden, con una respuesta definida por los parámetros de diseño ζ y ω_n . Se puede comprobar que esto siempre sucede si se cumplen las condiciones para que (30) sea BIBO estable, dado que en esta situación la dinámica en lazo cerrado (32) es equivalente a

$$\ddot{e}_y + 2\zeta\omega_n\dot{e}_y + \omega_n^2e_y = z_{u1}(t) - \hat{z}_{u1}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{e}_y. \quad (33)$$

Como la diferencia $z_{u1}(t) - \hat{z}_{u1}(t)$ está uniformemente acotada por un disco centrado en el origen del espacio de errores de estimación, así como las trayectorias de los errores \tilde{e}_y y $\dot{\tilde{e}}_y$, el lado derecho de (33), puede verse como una perturbación finalmente acotada a la entrada del sistema lineal del lado izquierdo. En resumen, el observador GPI propuesto auto-actualiza continuamente la estimación de las perturbaciones, $z_{u1}(t)$, en la forma de un vector de polinomios de grado $(p-1)$. El resultado total es que el término de residuo, $\mathbf{r}(t)$, agregado a la aproximación de los polinomios de Taylor, también se auto-actualiza conforme avanza el tiempo, por lo que este término y un número finito de sus derivadas temporales pueden ser consideradas por sí mismas como una señal absoluta y uniformemente acotada.

Este sistema presenta en cada uno de sus componentes una dinámica dada por polinomios Hurwitz estables con raíces suficientemente lejos a la izquierda en el plano complejo. Por lo tanto, el vector de error de seguimiento articular, e_y , y su derivada temporal, \dot{e}_y , convergerán finalmente a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio de errores de seguimiento. \triangle

Para controlar el movimiento restringido (dirección de la fuerza), se parte nuevamente del modelo en coordenadas de imagen (8). Utilizando las propiedades de las matrices de proyección, \mathbf{Q}_y , \mathbf{P}_y y reordenando la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}_y\dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{P}_y\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{N} + \mathbf{P}_y\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_c \\ &+ \mathbf{P}_y\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u + \mathbf{P}_y\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}.\end{aligned} \quad (34)$$

La elección natural para $\boldsymbol{\tau}_c$ es

$$\boldsymbol{\tau}_c = -\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_f), \quad (35)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_d$ es la fuerza deseada y $\boldsymbol{\tau}_f$ es la parte a diseñar de esta entrada. Para dejar esta expresión en términos de la restricción conocida en coordenadas de imagen, considérese

$$\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi x}^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_\phi\mathbf{J}_{\varphi y}^T, \quad (36)$$

dado que $\mathbf{R}_\phi^T = \mathbf{R}_\phi$. Utilizando (15), (35) y (36), (34) se convierte en

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\varphi y}\dot{\mathbf{Q}}_y\dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{J}_{\varphi y}\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{N} + \mathbf{J}_{\varphi y}\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_u \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi y}\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ &- \mathbf{J}_{\varphi y}\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_\phi\mathbf{J}_{\varphi y}^T(\boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\tau}_f).\end{aligned} \quad (37)$$

Si se definen

$$\dot{e}_f = \lambda - \lambda_d \quad (38)$$

$$e_f = \int_0^t (\lambda - \lambda_d) d\vartheta \quad (39)$$

$$\mathbf{A}_F \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_y} \mathbf{M}_v(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \mathbf{J}_{\varphi_y}^T, \quad (40)$$

entonces se tiene

$$\dot{e}_f - \tau_f = \mathbf{A}_F^{-1} \left\{ \mathbf{J}_{\varphi_y} \mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) (-\tau_u + \mathbf{N}) + \mathbf{J}_{\varphi_y} \dot{\mathbf{Q}}_y \dot{\mathbf{y}} \right\}. \quad (41)$$

Nótese que \mathbf{A}_F es siempre invertible, dado que el término

$$\mathbf{M}_v^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\phi^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi, \quad (42)$$

lo es, puesto que \mathbf{R}_ϕ es invertible, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es una matriz diagonal, positiva definida, α_λ es positiva y por la Suposición 1, se asume que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ también lo es.

El término de la derecha en la ecuación (41) se considera desconocido y se utilizará un modelo interno en términos de un vector de polinomios y un término residual, z_{f1} , como el descrito por (19), cumpliendo además con las suposiciones 2, 3 y 4. De esta forma, se puede reescribir la ecuación (41) como

$$\dot{e}_f = \tau_f + z_{f1}. \quad (43)$$

En este punto puede considerarse un esquema de control análogo a (22-28), dado por

$$\tau_F = -\Lambda_F \hat{e}_f - \hat{z}_{f1} \quad (44)$$

$$\dot{\hat{e}}_f = \tau_F + \hat{z}_{f1} + \lambda_{fp} \tilde{e}_f \quad (45)$$

$$\dot{\hat{z}}_{f1} = \hat{z}_{f2} + \lambda_{f(p-1)} \tilde{e}_f \quad (46)$$

$$\dot{\hat{z}}_{f2} = \hat{z}_{f3} + \lambda_{f(p-2)} \tilde{e}_f \quad (47)$$

⋮

$$\dot{\hat{z}}_{f(p-1)} = \hat{z}_{fp} + \lambda_{f1} \tilde{e}_f \quad (48)$$

$$\dot{\hat{z}}_{fp} = \lambda_{f0} \tilde{e}_f, \quad (49)$$

donde $\lambda_{f0}, \dots, \lambda_{fp} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales positivas definidas.

Utilizando un razonamiento similar al presentado en el Teorema 1 se puede demostrar que el esquema propuesto lleva al sistema a una vecindad arbitrariamente pequeña centrada en el origen del espacio de error de fuerza e_f , siempre que z_f cumpla con las Suposiciones 2, 3 y 4 y que los polos del observador se localicen suficientemente lejos en el semiplano izquierdo del plano complejo. En este caso el parámetro Λ_F sirve para diseñar la respuesta del sistema de primer orden correspondiente a la parte lineal del sistema, que surge cuando se estima perfectamente z_{f1} y se cancela en (43) mediante la acción de control (44).

Observación 1: Una ventaja adicional de este esquema basado en observadores GPI, es que además de estimarse el modelo interno escogido para la perturbación a la entrada,

z_{u1} , se estima el error de velocidad en el espacio de imagen, del que puede extraerse el flujo óptico $\dot{\mathbf{y}}$, sin necesidad de medirlo directamente o utilizar un estimador basado en una aproximación de la derivada.

IV. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se utilizó el modelo de un robot de dos grados de libertad, dado en forma paramétrica por (Spong *et al.*, 2006)

$$\begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 c_2 & \theta_3 + \theta_2 c_2 \\ \theta_3 + \theta_2 c_2 & \theta_3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} -\theta_2 s_2 \dot{q}_2 & -\theta_2 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \theta_4 c_1 + \theta_5 c_{12} \\ \theta_5 c_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \theta_7 \dot{q}_2 + \theta_9 \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}. \quad (50)$$

Con el objeto de llevar a cabo una simulación lo más realista posible, se utilizaron los valores reportados en (Reyes y Kelly, 2001)

La superficie está definida por la restricción en coordenadas de imagen $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$ como

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\tan \alpha_i (y_1 - l_i)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i}} - \frac{y_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i}}, \quad (51)$$

donde $\alpha_i = -1.0472$ y $l_i = 1229$. Se asume que estos parámetros se pueden calcular a partir de la información del sistema de visión. Nótese que (51) está definida de tal manera que $\mathbf{J}_{\varphi_y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}}$ tenga magnitud unitaria y apunte hacia afuera de la superficie. La simulación consistió en llevar al robot de un punto inicial $(y_1(0), y_2(0)) = (855, 648)$ [píxeles] a un punto final $(y_1(t_f), y_2(t_f)) = (367, 1494)$ [píxeles], en un tiempo de $t_f = 25$ [seg] y, simultáneamente, seguir una trayectoria de fuerza dada por

$$\lambda_d = 10(1 - e^{-(1/0.8)t}) + 10[\text{N}]. \quad (52)$$

Para generar la trayectoria deseada de posición y_{1d} se utilizó un polinomio de quinto orden en el tiempo, mientras que y_{2d} , se calculó para cumplir con (51). El tiempo de muestreo utilizado para el lazo de control de posición y fuerza fue de $T = 0.0025$ [seg], mientras que el tiempo de muestreo de la cámara fue propuesto en $T_c = 1/33$ [seg].

Los parámetros utilizados para modelar la cámara, mediante la proyección de perspectiva dada en la ecuación (3) son $\alpha_c = 360000$ [píxeles/m], $\lambda_v = 0.008$, ${}^c O_{R1} = 0.25$ [m], ${}^c O_{R2} = 0$ [m], ${}^c O_{R3} = 1.3$ [m], $\phi_c = 0$ [°], $u_0 = 250$ [píxeles] y $v_0 = 230$ [píxeles]. Se asume que no se tiene conocimiento de u_0, v_0 ni de los parámetros ${}^c O_{R1}, {}^c O_{R2}$ y ${}^c O_{R3}$. También se supone desconocido el ángulo de rotación de la cámara y se propone $\phi_c = 10$ [°]. Asimismo se suponen desconocidos los parámetros α_c y λ_v lo que se engloba en el desconocimiento de α_λ , que se propone como $\alpha_\lambda = 2897.8$. Los parámetros relacionados con la matriz de inercia, θ_1, θ_2 y θ_3 , también se suponen desconocidos por lo que se propone $\hat{\theta}_1 = 3.057$ [kg m²], $\hat{\theta}_2 = 0.1592$ [kg m²] y $\hat{\theta}_3 = 0.0408$ [kg m²].

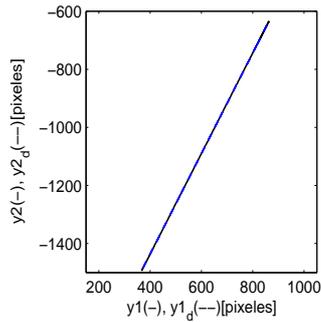


Figura 2. Trayectoria en el plano de imagen

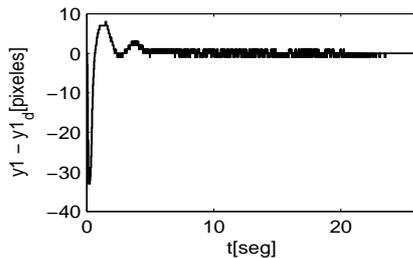


Figura 3. Seguimiento para y_1 [pixels]

En las Figuras 2, 3 y 4 se muestra el seguimiento en coordenadas visuales, mientras que en la Figura 5 se muestra el seguimiento de la fuerza que ejerce el robot sobre la superficie. El error de seguimiento de posición en estado estacionario es menor a 1 [pixel] en ambas coordenadas, mientras que el error de seguimiento de fuerza en estado estacionario es menor a 2 [N], a pesar de la incertidumbre en los parámetros necesarios para implementar el esquema de control-observador.

V. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una alternativa para el problema de control simultáneo de posición y fuerza de robots manipuladores rígidos cuando interactúan con entornos no estructurados. El esquema propuesto, basado en observadores GPI tiene algunas ventajas sobre otros métodos reportados en la literatura, tales como la interpretación directa de los parámetros necesarios para la sintonización del esquema controlador-observador, dado que utiliza herramientas conocidas de control lineal como la ubicación de polos y la respuesta de sistemas de segundo orden. Además, el mismo método elimina la necesidad de medir directamente la velocidad al estimarla directamente como parte del esquema. Para implementar este método no es necesario conocer todo el modelo, únicamente la matriz de inercia y algunos datos de calibración de la cámara. No obstante, el algoritmo utilizado presentó cierta robustez ante incertidumbre en los parámetros que es necesario conocer, esto en parte se debe a la posibilidad de trabajar directamente en coordenadas de imagen, eliminando así la necesidad de

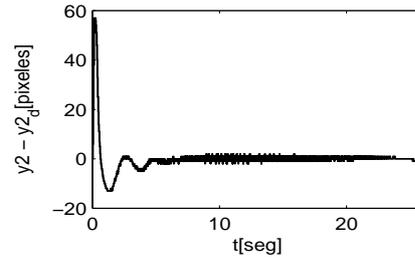


Figura 4. Seguimiento para y_2 [pixels]

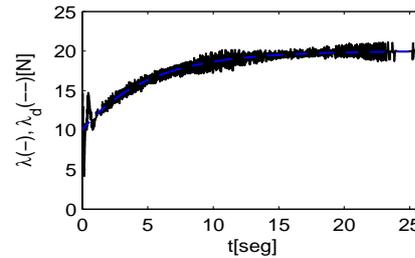


Figura 5. Seguimiento de fuerza [N]

calcular la cinemática visual inversa. Aunque el esquema no garantiza convergencia asintótica del error de seguimiento, éste puede hacerse arbitrariamente pequeño mediante la aplicación de alta ganancia, limitada únicamente por la posible amplificación del ruido proveniente de los sensores.

VI. AGRADECIMIENTOS

Marco A. Arteaga agradece a **CONACYT** bajo el proyecto No. **58112** y a la **DGAPA-UNAM** bajo el proyecto No. **IN105408**. Alejandro Gutiérrez-Giles agradece al **CONACYT** bajo la beca doctoral con CVU No. **334785**.

REFERENCIAS

- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa (1993). The orthogonalization principle for robot manipulators. *Proceedings of the IFAC Congress on Automatic Control*. pp. 507-512.
- Chen, Chi-Tsong (1999). *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed.
- Dean-León, E. C., V. Parra-Vega y A. Espinosa-Romero (2006). Global uncalibrated visual servoing for constrained robots working on an uncalibrated environments. *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Beijing, China.
- Kelly, Rafael, Javier Moreno y Ricardo Campa (2004). Visual servoing of planar robots via velocity fields. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- Lipiello, Vincenzo, Bruno Siciliano y Luigi Villani (2007). A position-based visual impedance control for robot manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy.
- Reyes, F y R. Kelly (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics* **11**, 267-282.
- Sciavicco, Lorenzo y Bruno Siciliano (1996). *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill.
- Sira-Ramírez, H., Mario Ramírez-Neria y A. Rodríguez-Ángeles (2010). On the linear control of nonlinear mechanical systems. *49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, USA.
- Spong, Mark W., Seth Hutchinson y M. Vidyasagar (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley and Sons.